

Info: Exercice à rendre dans la boîte prévue à cet effet

Rappels: $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, on étudie les extr. locaux
dans $\boxed{\text{int } E}$

Condition nécessaire: Si $\tilde{x} \in \text{int } E$ est un extr. local

et $\nabla f(\tilde{x})$ existe, alors, $\nabla f(\tilde{x}) = 0$ ($n=1$, $f'(x_0) = 0$,
 $f''(x_0)$ pour la nature!)

Définition 6.5 (Point stationnaire)

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{x} \in \text{int } E$. $\tilde{x}$ est
un point stationnaire de f si $\nabla f(\tilde{x})$ existe et $\nabla f(\tilde{x}) = 0$

Définition 6.6 : Point-selle.

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{x} \in \text{int} E$. On dit que $\tilde{x}$ est un point-selle de f si

(i) $\tilde{x}$ est un point stationnaire

(ii) $\tilde{x}$ n'est ni un max ni un min local,
i.e.

$$(i) \nabla f(\tilde{x}) = 0$$

$$(ii) \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in B(\tilde{x}, \delta) \cap E, \text{ tq } f(x_1) < f(\tilde{x}) < f(x_2)$$

Définition 6.7 Matrice Hessienne.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C^2(D)$, $\tilde{x} \in D$.

La matrice hessienne de f en $\tilde{x}$, notée $H_f(\tilde{x})$

est la matrice des dérivées partielles d'ordre 2 :

$$H_f(\tilde{x}) = \nabla(\nabla f)(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\tilde{x}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\tilde{x}) \end{bmatrix}$$

⚠ f un champ
scalaire

H_f est la matrice
jacobienne du
gradient de f .

Si $n=2$

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}$$

Si $|n=3|$ $H_f(x, y, z) =$
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Remarque 6.2

(i) Vu que $f \in C^2$, la règle de Schwarz (thm 4.19)
 $H_f(\vec{x})$ est est symétrique.

(ii) On peut vérifier que le polynôme de Taylor de f , d'ordre 2

en $\tilde{x}$ s'écrit

$$P_2(x) = f(\tilde{x}) + \underbrace{\nabla f(\tilde{x})(x - \tilde{x})^T}_{\langle \nabla f(\tilde{x}); (x - \tilde{x}) \rangle} + \frac{1}{2} (x - \tilde{x}) H_f(\tilde{x}) (x - \tilde{x})^T$$

Théorème 6.9: Extrémum local, condition suffisante.

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \text{int} E$ un point stationnaire de f .
Supposons que f est de classe C^2 dans un voisinage de $\tilde{x}$.

- (i) Si toutes les valeurs propres de $H_f(\tilde{x})$ sont strictement positives, $\tilde{x}$ est un minimum local.
- (ii) Si toutes les valeurs propres de $H_f(\tilde{x})$ sont strictement négatives, $\tilde{x}$ est un max local.

- (iii) Si toutes les valeurs propres de $H_f(\tilde{x})$ sont non-nulles, mais qu'il en a une qui est positive et une autre négative, $\tilde{x}$ est un point selle
- (iv) Si 0 est une valeur propre de $H_f(\tilde{x})$, on ne peut rien dire.

Remarque 6.10 (Sur les valeurs propres d'une matrice 2×2)

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Alors,

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \& \quad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

En particulier, si $\boxed{u=2}$,

$$(i) \det(A) < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \text{ ou } \lambda_2 < 0 < \lambda_1$$

$$(ii) \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ ou } \lambda_2 = 0$$

$$(iii) \det(A) > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 \text{ ou } \lambda_1, \lambda_2 < 0$$

$$\downarrow$$
$$\text{tr}(A) > 0$$

$$\downarrow$$
$$\text{tr}(A) < 0.$$

Donc, si $f \in C^2(E)$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \text{int } E$ est un point stationnaire, alors,

$$(i) \det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) > 0, \text{tr}(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) > 0 \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ est un min local}$$

$$(ii) \det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) > 0, \text{tr}(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) < 0 \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ est un max local,}$$

$$(iii) \det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) < 0 \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ est un point selle.}$$

(iv) Si $\det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) = 0$ on ne peut rien conclure.

⚠ ces tricks fonctionnent seulement pour $\boxed{n=2}$

Exemples 6.11 (i) proto exemple $f(x, y) = \frac{1}{2}\lambda_1 x^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 y^2$,

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, (\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$$

Sur le graphe, on observe que $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ min local,

$\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ max local & $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

$\Rightarrow$ point selle.

$\rightarrow$ et avec nos thms?

Étape 1: Points stationnaires.

$$\nabla f(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y), \quad \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0) \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$$

Étape 2 : nature du (des) point(s) stationnaire(s)

$$H_f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \text{ sont les valeurs propres de } H_f(0,0)$$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \xRightarrow{\text{thm 6.9}}$ min local, $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \xRightarrow{\text{thm 6.9}}$ max local,
Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1 \xRightarrow{\text{thm 6.9}}$ point selle.

(ii) Cas où $\det(H_f(\tilde{x}, \tilde{y})) = 0$.

Soit $f(x, y) = \lambda_1 x^4 + \lambda_2 y^4$. $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

Étape 1 : pts stationnaires.

$$\nabla f(x, y) = (4\lambda_1 x^3, 4\lambda_2 y^3), \quad \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0) \Leftrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$$

Étape 2: nature du/des point(s) stationnaire(s)

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 12\lambda_1 x^2 & 0 \\ 0 & 12\lambda_2 y^2 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ thm 6.9 ne permet pas de conclure.

Étape 3: étude à la main.

$$\text{On a } f(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$$

$$\text{Si } \lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad f(x, y) = \underbrace{\lambda_1}_{>0} \underbrace{x^4}_{\geq 0} + \underbrace{\lambda_2}_{>0} \underbrace{y^4}_{\geq 0} \geq 0 = f(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$\Rightarrow (0, 0)$ est un minimum global (donc local aussi)

$$\text{Si } \lambda_1, \lambda_2 < 0, \quad f(x, y) = \underbrace{\lambda_1}_{<0} \underbrace{x^4}_{\geq 0} + \underbrace{\lambda_2}_{<0} \underbrace{y^4}_{\geq 0} \leq 0 = f(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$\Rightarrow (0,0)$ est un maximum global (donc local)

Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$$f(x,y) = \underbrace{\lambda_1 x^4}_{<0 \text{ } >0} + \underbrace{\lambda_2 y^4}_{>0 \text{ } >0}$$

$\leq 0 \qquad \qquad \geq 0$

$\forall t \in \mathbb{R}^*$,

$$f(t,0) = \underbrace{\lambda_1 t^4}_{<0 \text{ } >0} < 0 = f(0,0) = 0 < \underbrace{\lambda_2 t^4}_{>0 \text{ } >0} = f(0,t)$$

$\forall \delta > 0, \exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{B}((0,0), \delta)$ tq $f(x_1, y_1) < f(0,0) < f(x_2, y_2)$

$(x_1, y_1) = (\frac{\delta}{2}, 0)$, $(x_2, y_2) = (0, \frac{\delta}{2})$ on a le résultat:

$\Rightarrow (0,0)$ est un point selle.

$$(iii) f(x,y) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2xy - y^2$$

Trouver tous les points stationnaires & étudier leur nature

Étape 1 : pts stationnaires:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x - 2y$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \rightarrow x = y \end{cases}$$

$$\rightarrow 4x^3 - 12x^2 + 6x + 2x = 0 \Leftrightarrow 4x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, 1 \text{ ou } 2$$

$\Rightarrow$ les points stationnaires sont en $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0), (1,1), (2,2)$

Étape 2: nature des pts stationnaires.

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 24x + 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(0,0): $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\det(H_f(0,0)) = -12 - 4 = -16 < 0$
 $\Rightarrow (0,0)$ est un point-selle.

(1,1): $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 - 24 + 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det(H_f(1,1)) = 12 - 4 = 8 > 0$$

$$\text{tr}(H_f(1,1)) = -8 < 0$$

} $\Rightarrow (1,1)$ est un max loc.

(2,2): $H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (2,2)$ est un point-selle.

§ 6-2 Optimisation sous contrainte, multiplicateurs de Lagrange

Contexte: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g \in C^1(D)$, $E = g^{-1}(\{0\})$
 $= \{x \in D; g(x) = 0\}$.

On suppose que $E \neq \emptyset$ et $\forall x \in E, \nabla g(x) \neq 0$.

But: trouver le min/max de f sur E .

⚠ $\nabla g(x) \neq 0 \stackrel{\text{TFI}}{=} \Delta$ localement, E est le graphe d'une fonction.

Théorème 6.12

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g \in C^1(D)$, $E = \{x \in D : g(x) = 0\}$

Supposons $E \neq \emptyset$ et $\forall x \in E, \nabla g(x) \neq 0$.

Si $\tilde{x}$ est un extremum local de f sur E , alors
 $\exists \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ tq $\nabla f(\tilde{x}) = \tilde{\lambda} \nabla g(\tilde{x})$

Corollaire 6.13

Soient D, E, f, g comme ci-dessus et $L: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
défini par $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$.

Si $\tilde{x}$ est un extremum local de f sur E , $\exists \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ tq
 $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ est un point stationnaire de L

💡 Si $\bar{\lambda}$ est tel $\nabla f(\bar{x}) = \bar{\lambda} \nabla g(\bar{x})$, et $\tilde{\lambda} = -\bar{\lambda}$

ou $\nabla f(\bar{x}) + \tilde{\lambda} \nabla g(\bar{x}) = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(\bar{x}, \tilde{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) + \tilde{\lambda} \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}) = 0$$

1^{ère} comp.
de $\nabla f(\bar{x}) + \tilde{\lambda} \nabla g(\bar{x}) = 0$

$$\vdots$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}(\bar{x}, \tilde{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) + \tilde{\lambda} \frac{\partial g}{\partial x_n}(\bar{x}) = 0$$

n^{ème} comp de
 $\nabla f(\bar{x}) + \tilde{\lambda} \nabla g(\bar{x}) = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\bar{x}, \tilde{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow g(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} \in E.$$

Exemples 6.14

(i) $n=2$ Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x \cdot y$

Trouver la valeur maximale de f sous la contrainte $2x^2 + y^2 = 4$. Soit $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(2x^2 + y^2 - 4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \iff y + 4\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \iff x + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \iff 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y(1) - 2x(2): \quad y^2 - 2x^2 = 0 \\ (3): \quad y^2 = 4 - 2x^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x^2 &= 4 - 2x^2, \quad x^2 = 1, \\ x &= -1 \quad \text{ou} \quad +1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{x=-1} \quad y^2 &= 4 - 2(-1)^2 = 2 \Rightarrow y = -\sqrt{2}, \text{ ou } \sqrt{2}. \\ \leadsto (x, y) &= (-1, -\sqrt{2}) \text{ ou } (-1, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{x=1} \quad y^2 &= 4 - 2(1)^2 = 2 \Rightarrow y = -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} \\ \leadsto (x, y) &= (1, -\sqrt{2}) \text{ ou } (1, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

La valeur de λ n'est pas importante

$\Rightarrow$ min & max de f sous la contrainte $2x^2 + y^2 = 4$
sont parmi $f(-1, -\sqrt{2})$, $f(-1, \sqrt{2})$, $f(1, -\sqrt{2})$ et $f(1, \sqrt{2})$

$$f(-1, -\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \quad f(-1, \sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \quad f(1, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \quad f(1, \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \max = \sqrt{2}, \quad \min = -\sqrt{2}$$

$$(iii) \quad \underline{n=3}$$